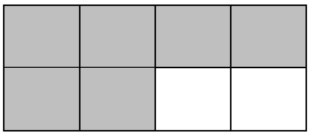
Les écritures fractionnaires

I) Rappels :

1) Notion de partage – Fraction de la surface d'une figure :

On partage un rectangle en 8 parties. Ces huit morceaux portent le nom de "huitièmes".
→ Sur ces 8 huitièmes, on en colorie 6, 8 ou 4.
La partie coloriée est une fraction du rectangle initial.



Les $\frac{6}{8}$ du gâteau

Les $\frac{8}{8}$ du gâteau

Les $\frac{4}{8}$ du gâteau

Représenter une fraction $\frac{a}{b}$ d'une figure,
c'est partager cette figure en b parties égales et en représenter a.

II) Définitions :

Définition :
Soit a et b deux nombres, avec $b \neq 0$.
Le quotient de a par b est le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir a.

Exemple : $\frac{12}{4} = 12 \div 4 = 3$ car $3 \times 4 = 12$

Le quotient de $a \div b$ se note $\frac{a}{b}$ (a sur b).

$a \div b$ est une opération (et non un nombre) : a s'appelle le **dividende** et b le **diviseur.**

$\frac{a}{b}$ est un nombre : a s'appelle le **numérateur** et b le **dénominateur**.

Exemple : Pour le quotient $\frac{6,2}{5}$, le numérateur est 6,2 et le dénominateur est 5.

Importance des écritures fractionnaires :
Exemple : On découpe une barre de 10 mètres de long en 3 parties égales.
Quelle est la longueur de chaque morceau ?
La division de 10 par 3 ne s'arrête jamais, le quotient ne peut être donné en valeur décimale exacte.
On dira que la longueur de chaque morceau est égale à $\frac{10}{3}$.

Remarque :
La division par 0 est interdite.

Définition :
On appelle fraction est le quotient de deux nombres entiers.
Si a et b sont des nombres entiers avec $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ est appelé une fraction.

Exemple : $\frac{12}{5}$ est une fraction,
$\frac{6,2}{5}$ n'est pas une fraction, c'est une écriture fractionnaire.

Remarque :

Tout nombre entier peut s'écrire comme une fraction.

Exemple : $7 = \frac{7}{1}$

Bilan : $\frac{3}{8}$ est à la fois une écriture fractionnaire, une fraction et le quotient de 3 par 8.

Remarques :

On donne des noms particuliers à certaines fractions :

dont les dénominateurs sont **2** (**demis** et non deuxièmes)

→ *orthographe : un demi, cinq demis*

dont les dénominateurs sont **3** (**tiers** et non troisièmes),

→ *« tiers » est invariable, avec un « s »*

dont les dénominateurs sont **4** (**quart** et non quatrièmes)

→ *orthographe : un quart, sept quarts*

On prendra soin de toujours écrire la barre de fraction **au niveau de la ligne d'écriture**.

→ *Pour cela, il est toujours préférable de commencer par écrire la barre de fraction avant d'y placer le numérateur et le dénominateur.*
(Ce qui oblige à penser que ce qui importe c'est la notion de fraction plus que le numérateur).

III) Egalité de deux quotients – Transformation d'une écriture fractionnaire :

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

1) Propriété :

Le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres ne change pas si on multiplie (ou on divise) le numérateur et le dénominateur par un même nombre différent de zéro.

Soit a, b, k trois nombres non nuls : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$

Exemple : Une fraction égale à $\frac{0{,}2}{3}$ est $\frac{0{,}2}{3} = \frac{0{,}2 \times 10}{3 \times 10} = \frac{2}{3}$

2) Simplification d'une écriture fractionnaire :

Simplifier une fraction, c'est la remplacer par une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Lorsque la simplification est optimale, on obtient une fraction dite **irréductible** (on ne peut plus la simplifier).

Exemple : Simplifier la fraction $\frac{132}{110}$ → $\frac{132}{110} = \frac{66 \times \boxed{2}}{55 \times \boxed{2}} = \frac{66}{55} = \frac{6 \times \boxed{11}}{5 \times \boxed{11}} = \frac{6}{5}$

(fraction irréductible)

ERREUR A EVITER :

La simplification n'est pas possible avec l'addition :

$$\frac{32+2}{8+2}=\frac{34}{10}=3,4 \quad \text{et} \quad \frac{32}{8}=4$$

IV) Demi-droite graduée:

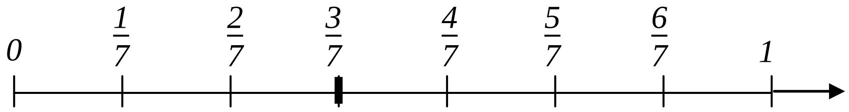
Fractions inférieures à l'unité

Pour placer une fraction comme $\frac{3}{7}$ sur un axe gradué, il faut partager le segment limité par les deux valeurs (abscisses) 0 et 1 en 7 parties égales.

Chaque morceau limité par 2 graduations correspond à un septième.

La première graduation correspond donc à $\frac{1}{7}$, la deuxième graduation a pour abscisse $\frac{2}{7}$, et la troisième graduation a pour abscisse $\frac{3}{7}$, … :

Voici un axe gradué de 0 à 1, et divisé en sept parts égales :



D'autres exemples : Placer la fraction $\frac{4}{9}$ ou placer la fraction $\frac{5}{8}$

Fractions supérieures à l'unité :

Pour placer une fraction supérieure à l'unité, on commence par effectuer la division euclidienne.

Par exemple, si on veut placer la fraction $\frac{13}{6}$, on effectue la division euclidienne de 13 par 6 :

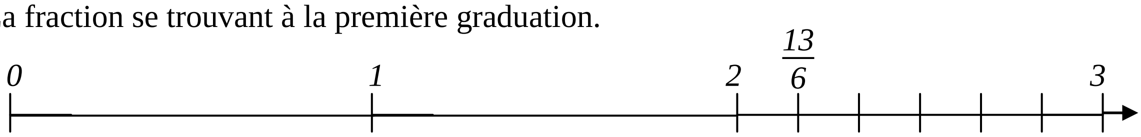
$$\begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\ , \text{ donc : } 13=6\times2+1$$

→ ainsi, la fraction $\frac{13}{6}$ se situe entre les valeurs 2 et 3, il suffit de graduer en 6 parties l'intervalle compris entre les valeurs 2 et 3, soit entre $\frac{12}{6}$ et $\frac{18}{6}$:

On peut décomposer : $\frac{13}{6}=\frac{12+1}{6}=\frac{12}{6}+\frac{1}{6}=2+\frac{1}{6}$.

On partage le segment compris entre 2 et 3 en 6 parties égales.

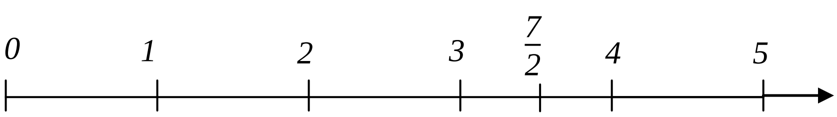
La fraction se trouvant à la première graduation.



Autre exemple :

Si on veut placer la fraction $\frac{7}{2}$. On divise : $\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$, donc : $7=2\times3+1$, donc $\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}$.

Cette fraction va donc se placer entre les deux valeurs entières 3 et 4. C'est le segment compris entre 3 et 4 que l'on partage en 2. La fraction se trouvant à la première graduation.



V) Multiplier une fraction par un nombre :

Vocabulaire :

Prendre une fraction d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par cette fraction.

Propriété :

Soit 3 nombres entiers a, b et c, b étant différent de 0. On a :

$$\frac{a}{b}\times c = a\times\frac{c}{b} = \frac{a\times c}{b}$$

Exemple : Dans un collège, $\frac{3}{5}$ des 420 élèves sont des filles.

Le nombre de filles est : $\frac{3}{5}\times 420 = \frac{3\times 420}{5} = \frac{3\times\boxed{5}\times 84}{\boxed{5}} = 3\times 84 = 252$.

Exemples :

$$\frac{23}{7}\times 56 = \frac{23\times 56}{7} = \frac{23\times 8\times\boxed{7}}{\boxed{7}} = 23\times 8 = 184\ .$$

$$\frac{18}{4}\times 6 = \frac{18\times 6}{4} = \frac{\boxed{2}\times 9\times\boxed{2}\times 3}{\boxed{2}\times\boxed{2}} = 27\ .$$